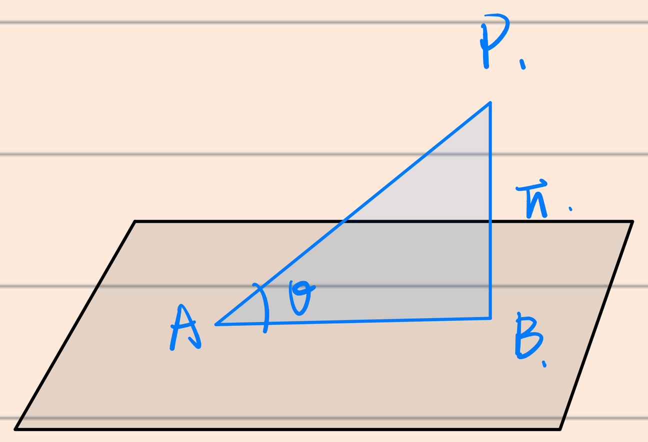
课堂总结

线面角

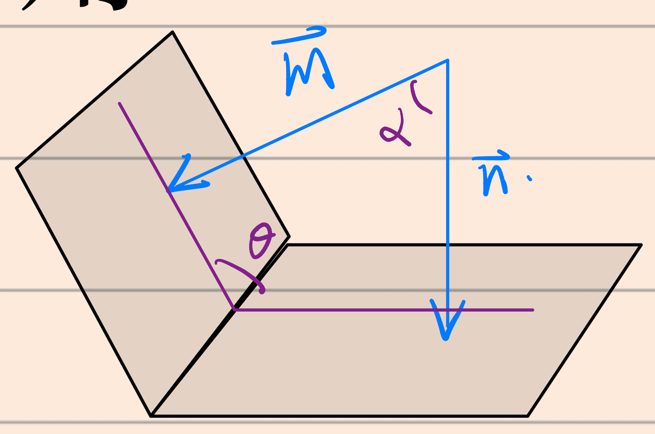


法一：作出线面角 $\sin\theta = \frac{PB}{PA}$

法二：$\sin\theta = \frac{d}{|PA|}$

法三：$\sin\theta = \cos\alpha = \frac{|\vec{PA}\cdot\vec{n}|}{|\vec{PA}||\vec{n}|}$

二面角

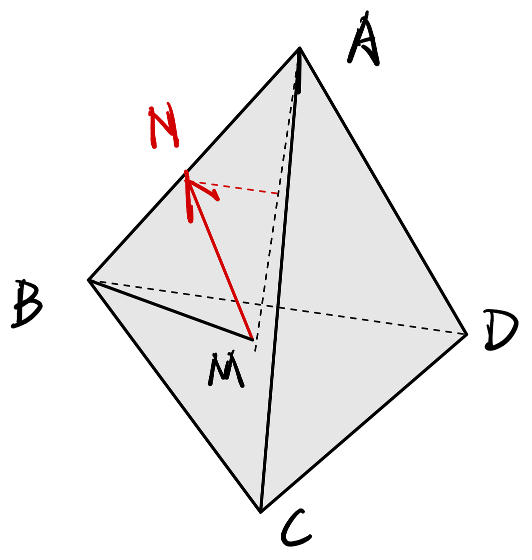


$\sin\theta = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$

第1讲:空间向量题型拓展(1)

1. 在棱长为1的正四面体$ABCD$中,点M满足$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+(1-x-y)\overrightarrow{AD}$,点$N$满足$\overrightarrow{DN}=\lambda\overrightarrow{DA}-(\lambda-1)\overrightarrow{DB}$,当$AM$、$DN$最短时,$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MN}=$(A)　M,B,C,D四点共面.

A. $-\frac{1}{3}$　N在AB上　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{2}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$



法一：$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MN}=|AM|\cdot\overrightarrow{MN}$在$\overrightarrow{AM}$上投影

$=-|AM|\cdot\frac{1}{2}|AM|=-\frac{1}{2}AM^2=-\frac{1}{3}$ ✓

$AM=\frac{\sqrt{6}}{3}$

法二：基底　$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MA})=\frac{1}{2}(0-AM^2)$

2. 如图,H为四棱锥$P-ABCD$的棱PC的三等分点,且$PH=\frac{1}{2}HC$,点G在AH上.$AG=mAH$.四边形$ABCD$为平行四边形,若G,B,P,D四点共面.求m的值.

$\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AP}+z\overrightarrow{AD}$

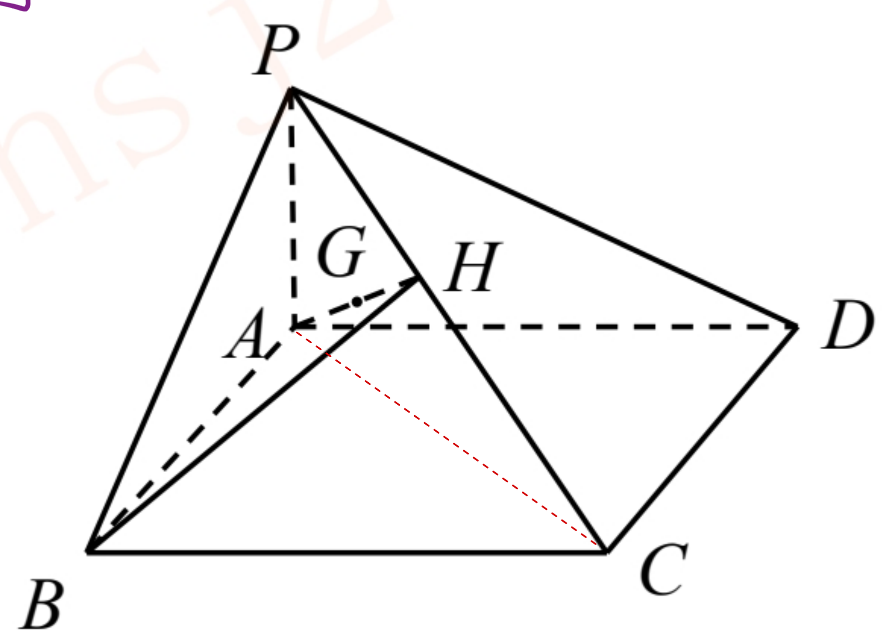
$\overrightarrow{AG}=m\overrightarrow{AH}=m\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}\right)$

$=m\cdot\left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}\right)$

$=m\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}\right)$

$m\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=1$

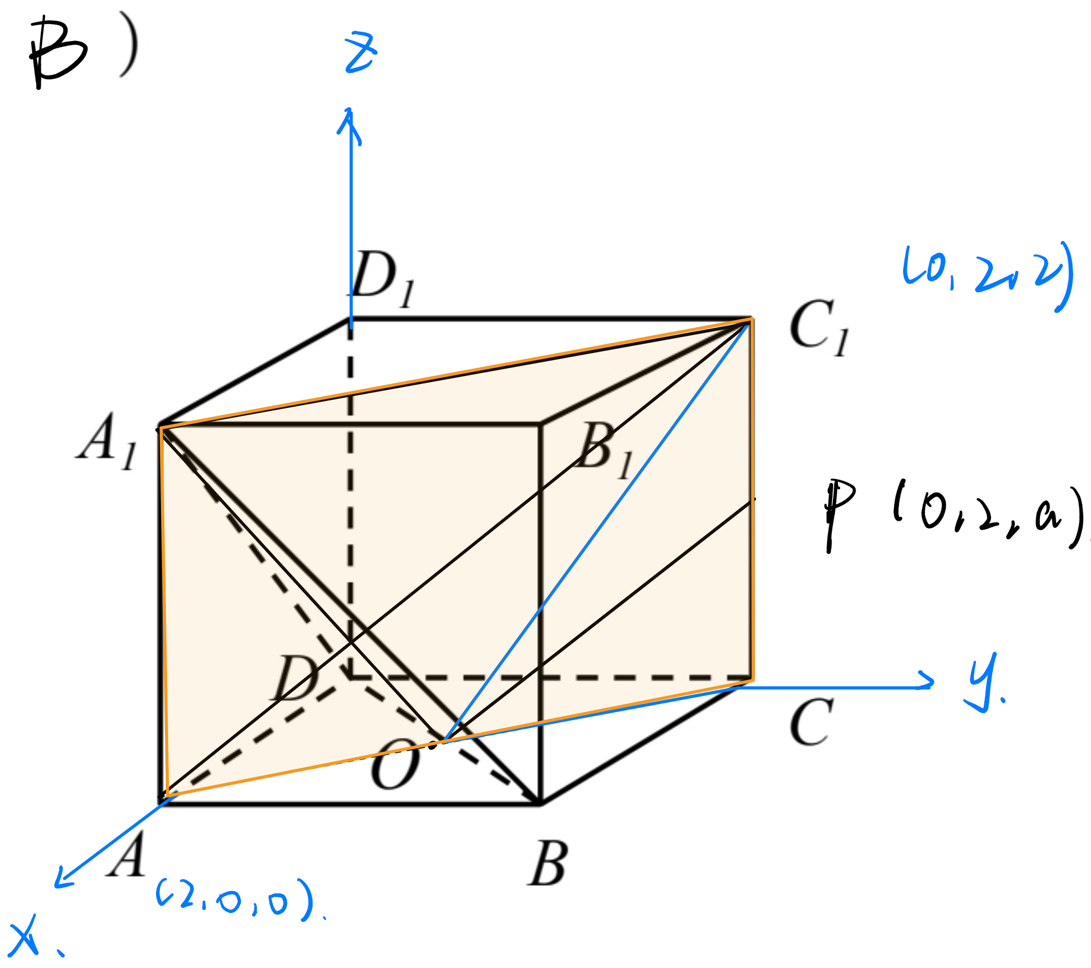
$m=\frac{3}{4}$



3. (2014•四川)如图,在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,点O为线段BD的中点,设点P在线段CC_1上,直线OP与平面A_1BD所成的角为α,则$\sin\alpha$的取值范围是(B)

A. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},1\right]$　　B. $\left[\frac{\sqrt{6}}{3},1\right]$ ✓

C. $\left[\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ ×　　D. $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3},1\right]$



建系

面与一线所成角的正弦值 = 一线与法向量的余弦值

$\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,2)$

法向量：$\vec{n}=(-1,1,1)$

$\overrightarrow{OP}=(-1,1,a)$　$a\in[0,2]$

$\sin\alpha=|\cos\theta|=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{OP}||\vec{n}|}=\frac{|1+1+a|}{\sqrt{a^2+2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{a+2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2+2}}$

令$a+2=x\in[2,4]=\frac{x}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{(x-2)^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{x^2}{x^2-4x+6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{\frac{6}{x^2}-\frac{4}{x}+1}}$

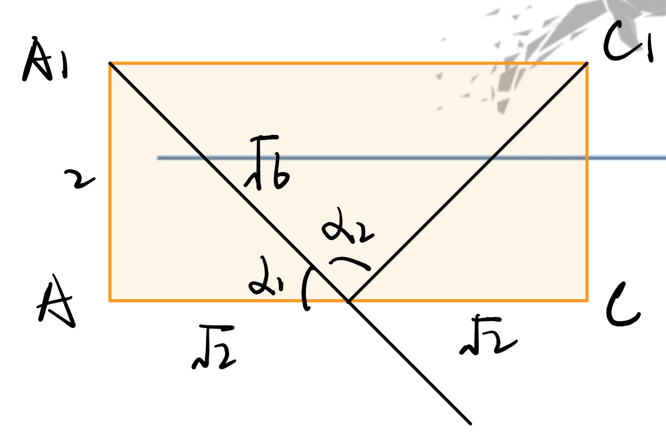
$6t^2-4t+1$　$t=\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

分母 min $=\frac{1}{3}$　$\sin\alpha_{max}=1$　$\sin\min=\frac{\sqrt{6}}{3}$

✓

几何　$\sin\alpha_{max}=1$

投影, $\sin\alpha_{min}$ 要么在C_1，要么在C.



4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 CC_1 的中点，F 是侧面 BCC_1B_1 内的动点，且 A_1F // 平面 D_1AE，则 A_1F 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值 t 构成的集合是（ D ）

A. $\left\{t\left|\frac{2\sqrt{5}}{5}\leqslant t\leqslant 2\sqrt{3}\right.\right\}$　　B. $\left\{t\left|\frac{2\sqrt{5}}{5}\leqslant t\leqslant 2\right.\right\}$

C. $\{t|2\leqslant t\leqslant 2\sqrt{3}\}$　　D. $\{t|2\leqslant t\leqslant 2\sqrt{2}\}$

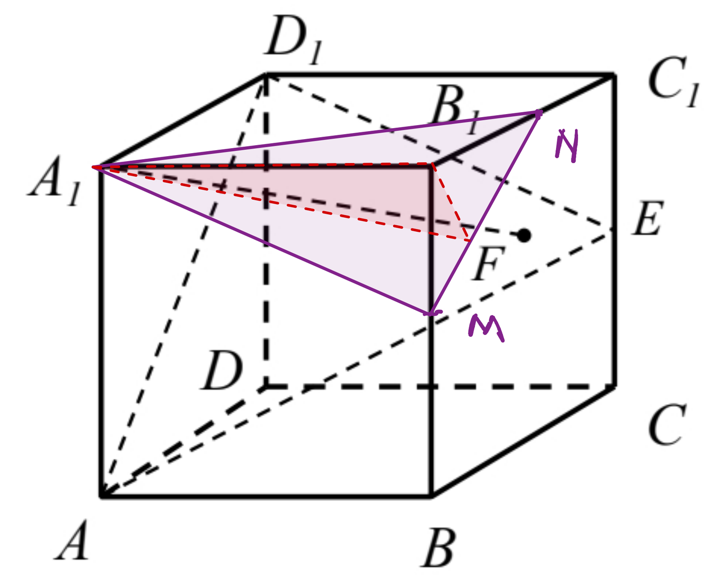
不建系.

先用几何法. 作 A_1MN // 平面 AD_1E

F 轨迹为 MN

$\tan\alpha=\frac{2}{B_1F}$

$B_1F\in[\frac{1}{2}MN, B_1M]=[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$.



5. 如图，四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$SD\perp$ 底面 $ABCD$，$AD=\sqrt{2}$ $DC=SD=2$，点 M 在侧棱 SC 上，$\angle ABM=60°$.

(I) 证明：M 在侧棱 SC 的中点；

(II) 求二面角 $S-AM-B$ 的大小.　$\arccos(-\frac{\sqrt{6}}{3})$.

动点在斜线段上，则设比例 λ

(1) $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}+\lambda\overrightarrow{CS}=(-\sqrt{2},-2\lambda,2\lambda)$

$\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$

$\cos 60°=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BM}|}=\frac{4\lambda}{2\sqrt{4\lambda^2+4\lambda^2+2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$.

$\therefore M$ 为 SC 中点.

(2) 设平面 SAM 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{SA}=0\end{cases}$　令 $y=1$，解得 $\vec{m}=(\sqrt{2},1,1)$.

求法向量通法.

写成通.

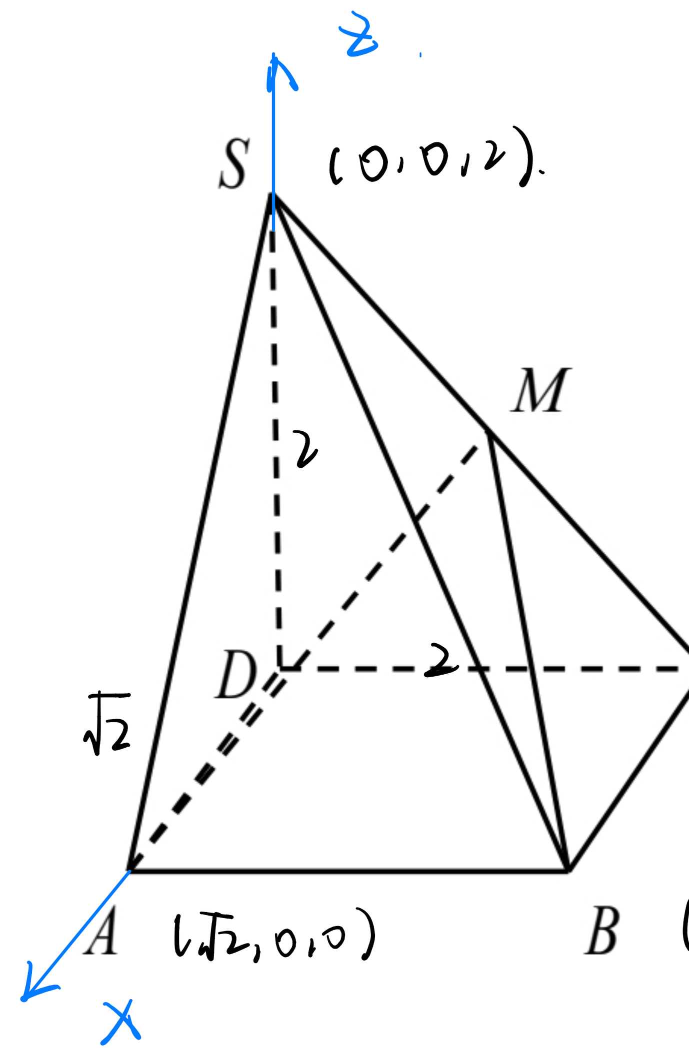
$\boxed{\text{交叉相乘再相减　掐头去尾}}$

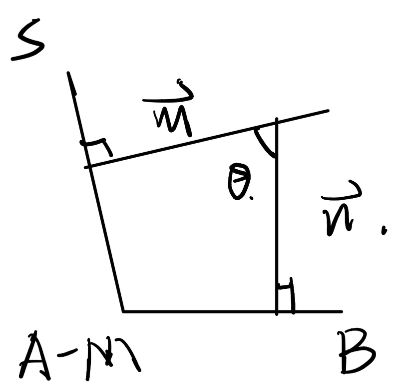
$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},1,1)$　$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$.

$\overrightarrow{SA}=(\sqrt{2},0,-2)$

$$\begin{matrix}-\sqrt{2} & 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -2 & \sqrt{2} & 0 & -2\end{matrix}$$

$(-2,-\sqrt{2},-\sqrt{2})\Rightarrow(\sqrt{2},1,1)$. 化简





$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{2\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\because$ 二面角 $S-AM-B$ 为钝角.

$\therefore \cos S-AM-B=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\angle S-AM-B=\arccos(-\frac{\sqrt{6}}{3})$.

设平面 AMB 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0.\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0.\end{cases}$

$$\begin{matrix}-\sqrt{2} & 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0\end{matrix}$$

$\vec{n}=(-2,0,-2\sqrt{2})\Rightarrow(-1,0,-\sqrt{2})$.

6. 如图 (1) 在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle CDA = 90°$，$AD = 2$，$BC = CD = 1$，$BE \perp AD$，沿 BE 将 $\triangle ABE$ 折起得到四棱锥 $A-BCDE$，如图 (2) 所示.

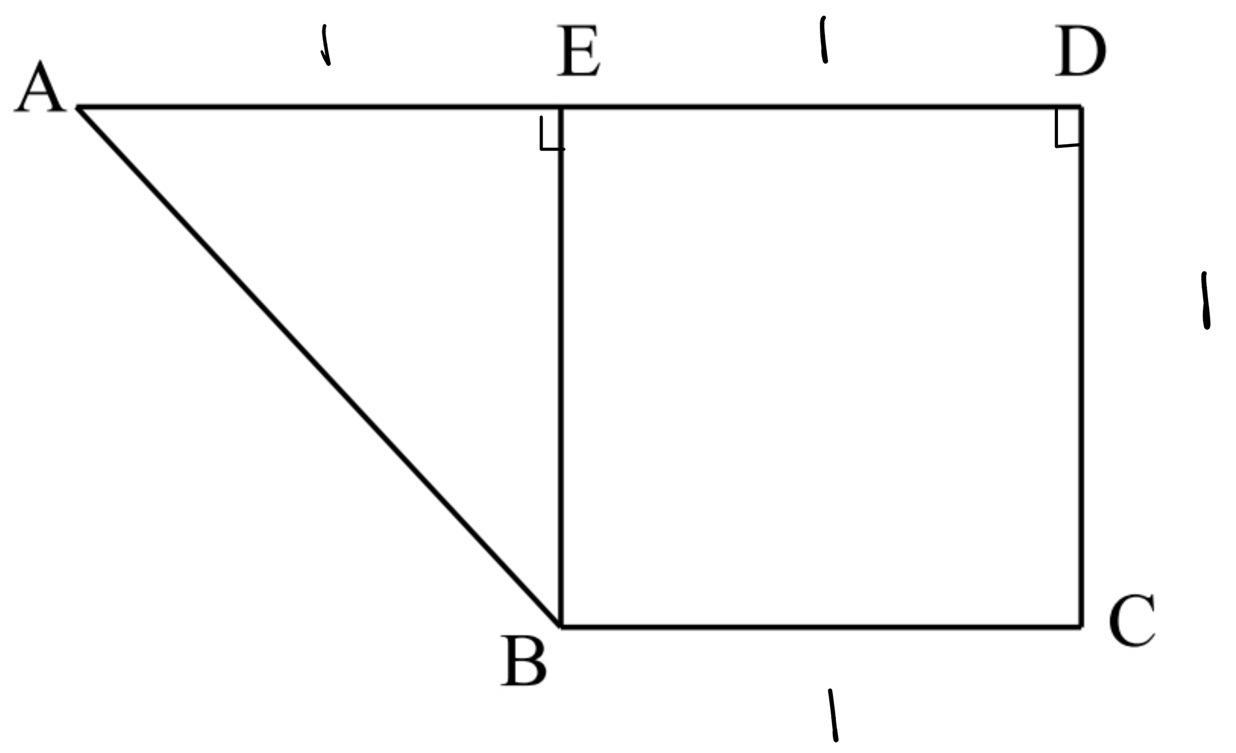
(1) 证明：平面 $AED \perp$ 平面 $BCDE$； $\begin{cases} BE \perp AE \\ BE \perp DE \end{cases}$

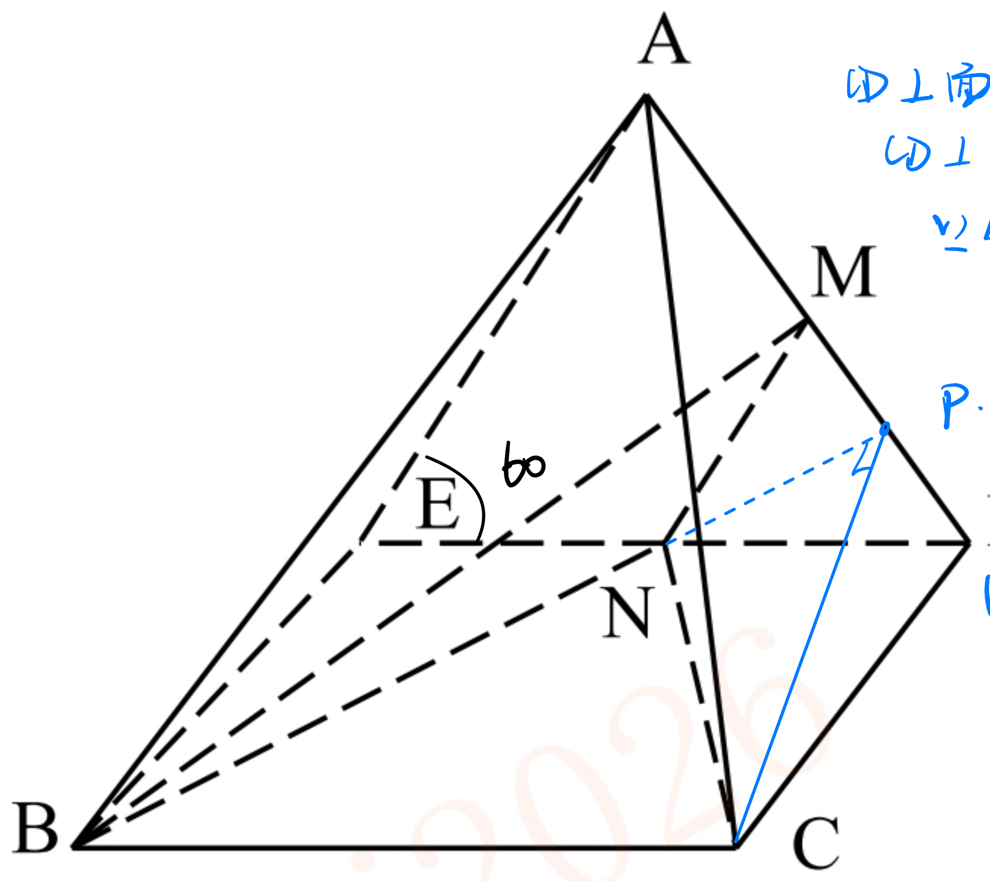
(2) 若二面角 $A-BE-D$ 的大小为 $60°$，M，N 分别是 AD，DE 的中点.

(ⅰ) 求 CN 与平面 ACD 所成角的正弦值；

(ⅱ) 在棱 AC 上是否存在点 G，使得 $DG \parallel$ 平面 BMN？若存在，求出 $AG : GC$ 的值；若不存在，说明理由.

(i) 几何法





$CD \perp$ 面 ADE.
$CD \perp NP$.
$\because \triangle MNP$ 为正△.
$NP \perp MD$.
P.(中点).
$NP \perp$ 面 ACD.
线面角 $\angle NPC$.

(2) $\because AE \perp BE$. $DE \perp BE$

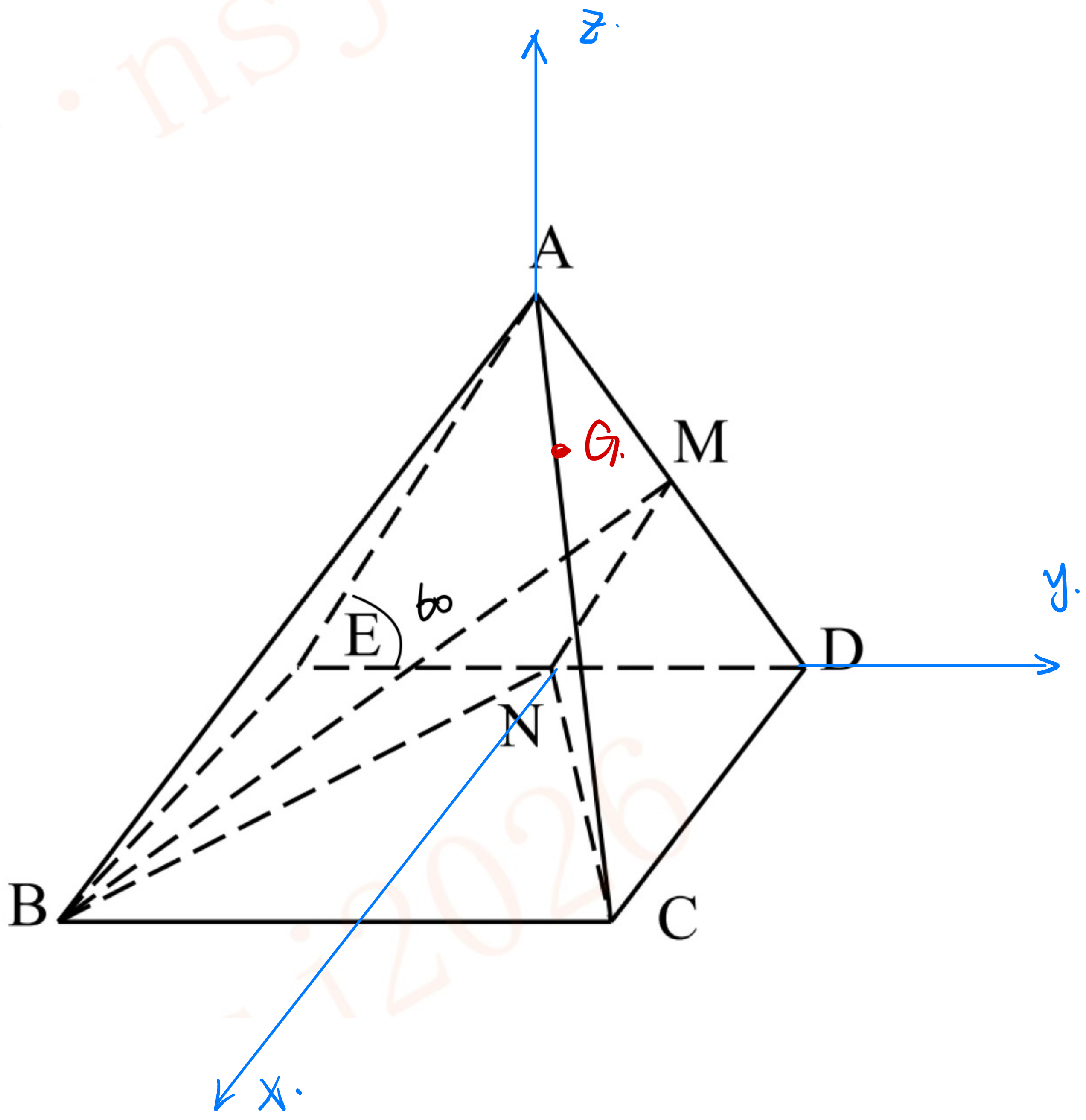
$\therefore \angle AED$ 为二面角 $A-BE-D$. 即 $\angle AED = 60°$.

$\therefore \triangle ADE$ 为等边△.

$\boxed{建系}$ N 为原点.

设平面 ACD 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$.

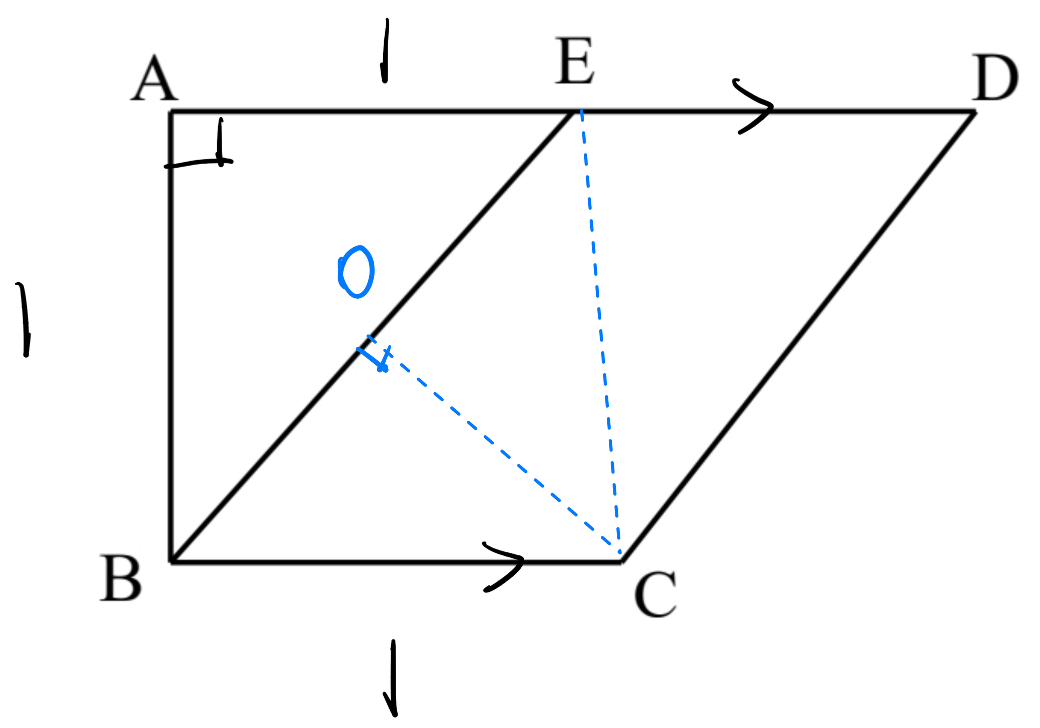
$$\sin\alpha = |\cos\theta| = \frac{|\vec{NC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{NC}||\vec{n}|} = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

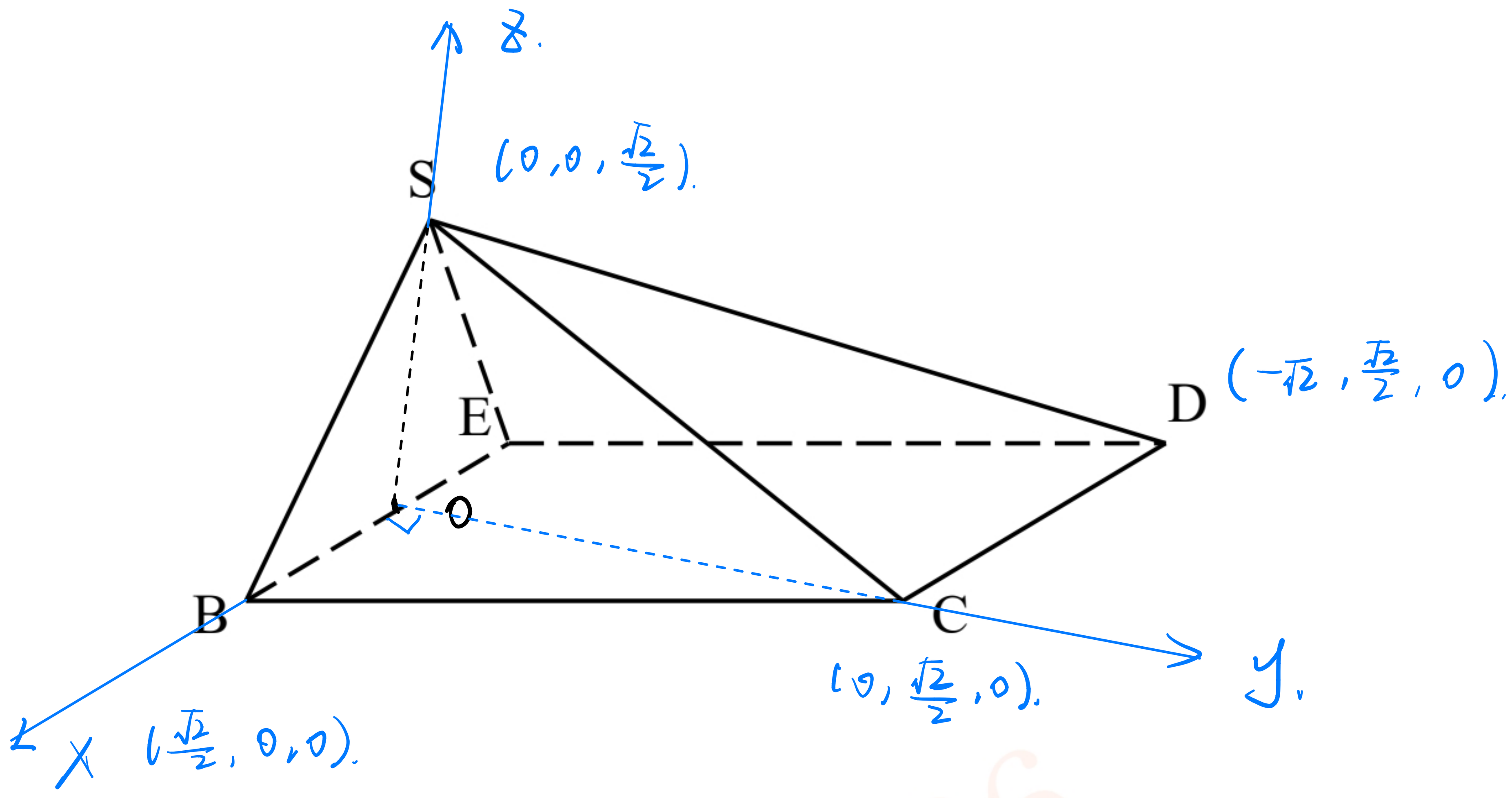


7. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD \mathbin{/\mkern-6mu/} BC$，$\angle BAD=90^\circ$，且 $AB=BC=\frac{1}{2}AD$，E 是 AD 的中点，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起到 $\triangle SBE$ 的位置，使平面 $SBE\perp$ 平面 $BCDE$.

(1) 求二面角 $B-SC-D$ 的正弦值；

(2) 在直线 SB 上是否存在点 P，使 $PD\perp$ 平面 SBC？若存在，请求出点 P 所在的位置；若不存在，请说明理由.





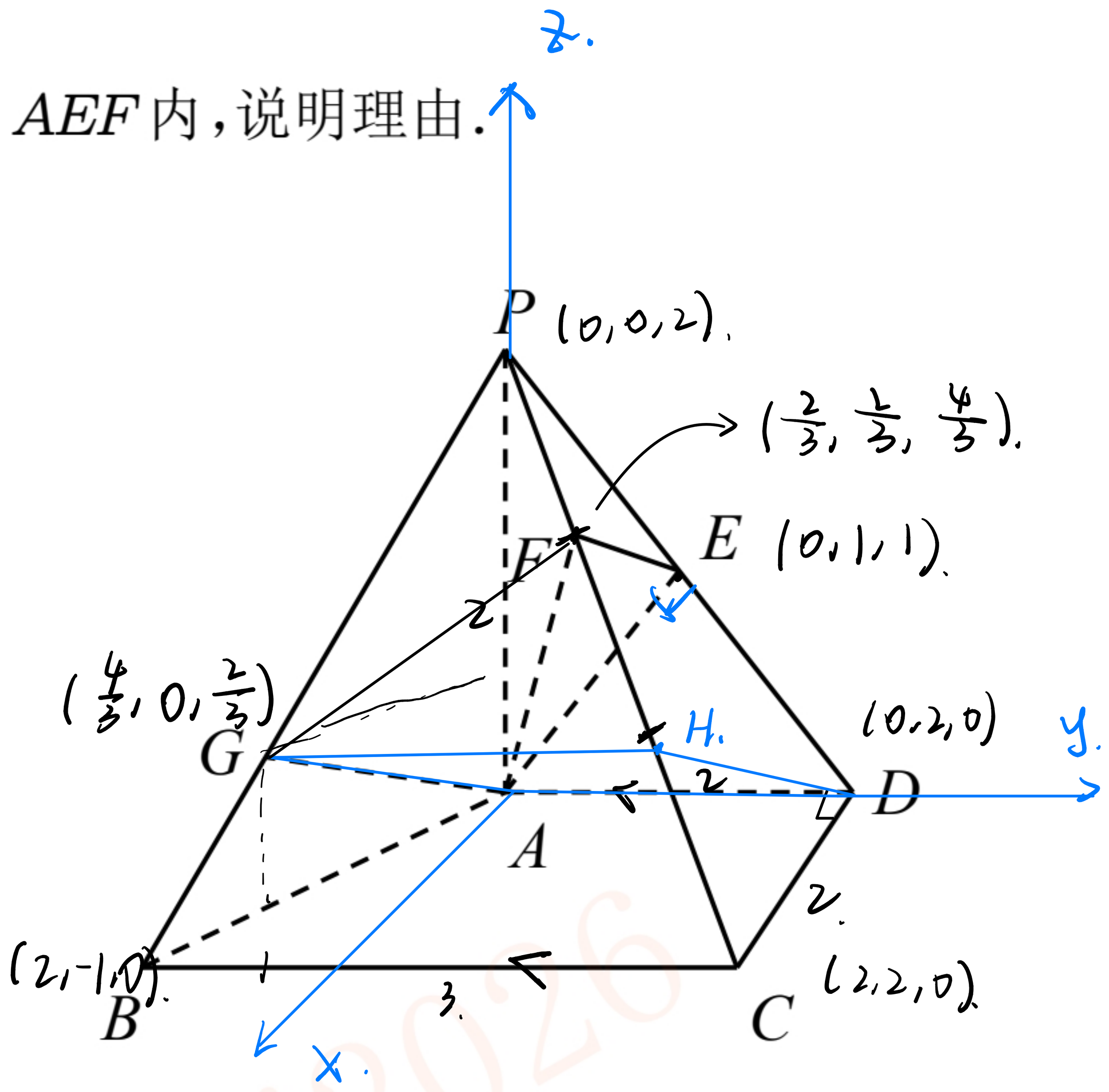
SO⊥面BCDE.

8. (2019·北京) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp CD$，$AD /\!/ BC$，$PA=AD=CD=2$，$BC=3$．E 为 PD 的中点，点 F 在 PC 上，且 $\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{1}{3}$．

(Ⅰ) 求证：$CD\perp$ 平面 PAD；√

(Ⅱ) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值；

(Ⅲ) 设点 G 在 PB 上，且 $\dfrac{PG}{PB}=\dfrac{2}{3}$．判断直线 AG 是否在平面 AEF 内，说明理由．



(Ⅲ)

几何

GADH 平行四边形.

EF 中位线. EF // AG // DH.

∴ AG ⊂ 平面 AEF.

建系

A为原点.

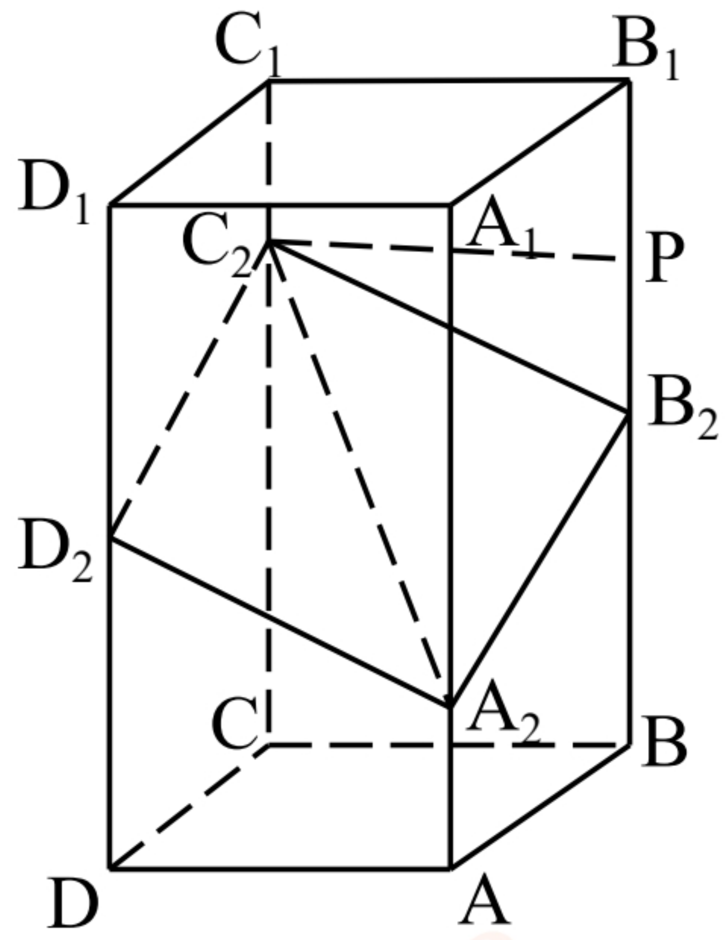
$\vec{AF}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3})=\frac{1}{2}\vec{AG}+\frac{2}{3}\vec{AE}$.

∴ ~.

9. (2023·新高考Ⅰ)如图,在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=2$,$AA_1=4$. 点 A_2,B_2,C_2,D_2 分别在棱 AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 上,$AA_2=1$,$BB_2=DD_2=2$,$CC_2=3$.

(1) 证明:$B_2C_2/\!/A_2D_2$;

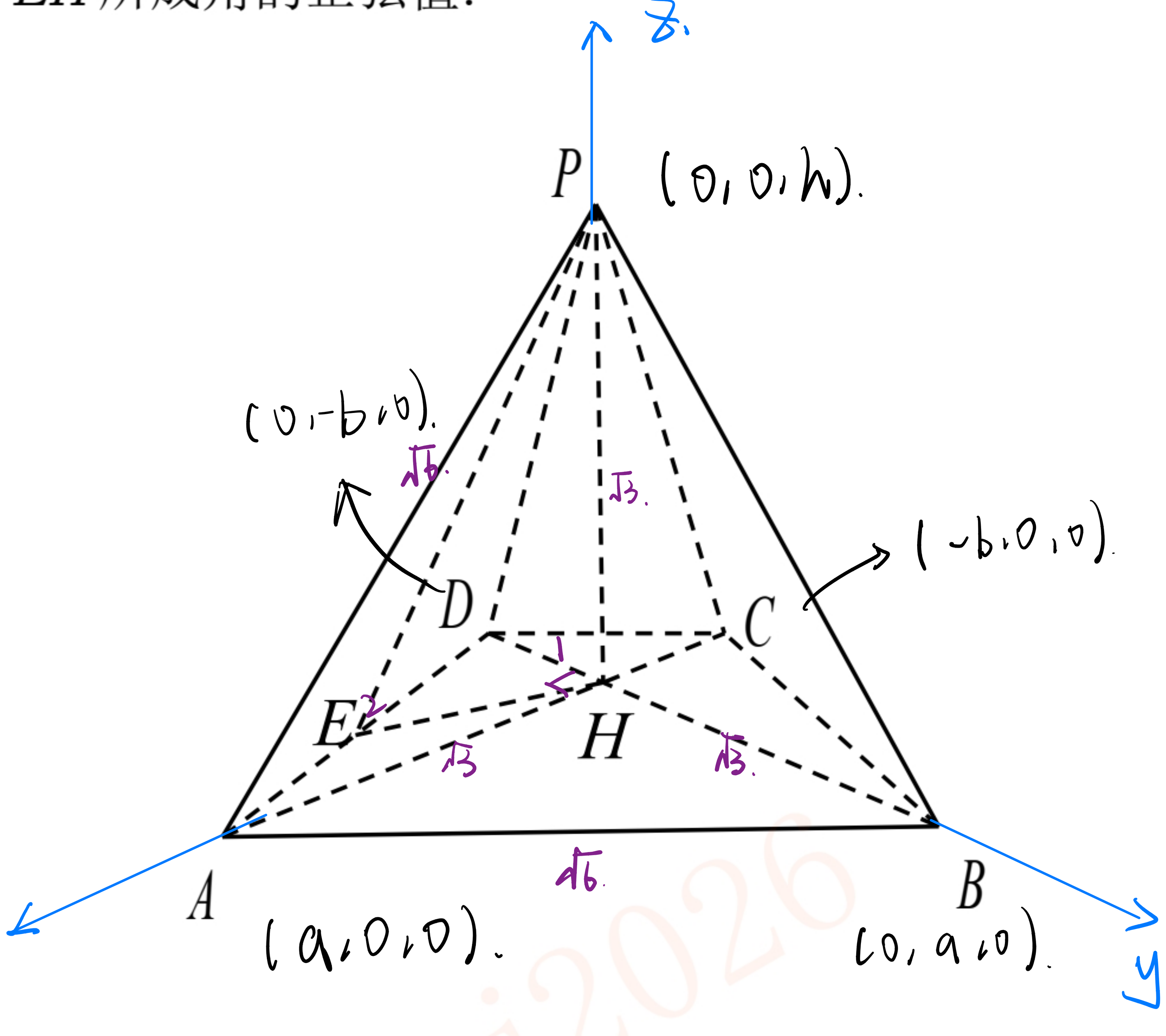
(2) 点 P 在棱 BB_1 上,当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 $150°$ 时,求 B_2P.



10. 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为等腰梯形，$AB /\!/ CD$，$AC \perp BD$ 垂足为 H，PH 是四棱锥的高，垂足为 H，E 为 AD 的中点.

(Ⅰ) 证明：$PE \perp BC$；

(Ⅱ) 若 $\angle APB = \angle ADB = 60^\circ$，求直线 PA 与平面 PEH 所成角的正弦值.



(1) 证 $E(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, 0)$

$\vec{PE} = (\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -h)$

$\vec{BC} = (-b, -a, 0)$.

$\therefore \vec{PE} \cdot \vec{BC} = -\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + 0 = 0$.

$\therefore PE \perp BC$.

(2) 设 $DH = 1$. 则 $AD = 2$, $AH = \sqrt{3}$. $AB = \sqrt{6}$.

$\vec{PA} = (\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3})$.

设平面 PEH 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$.

$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{HP} = 0. \\ \vec{m} \cdot \vec{HE} = 0. \end{cases}$ 令 $x = 1$, 解得, $\vec{m} = (1, \sqrt{3}, 0)$.

$0, 0, \sqrt{3}.$ $0, 0, \sqrt{3}.$
$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0.$ $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0$
$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0).$

不用写在过程中

$\sin\alpha = |\cos\theta| = \frac{|\vec{PA} \cdot \vec{m}|}{|\vec{PA}||\vec{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6} \cdot 2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore$ 直线 PA 与面 PEH 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

注意 下结论.

作业

1. 在各棱长都等于 1 的正四面体 $O-ABC$ 中，若点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(x+y+z=1)$，则 $|\overrightarrow{OP}|$ 的最小值为 ______.

2. 如图三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 BB_1C_1C 为菱形，$AB\perp B_1C$.

(Ⅰ) 证明：$AC=AB_1$；

(Ⅱ) 若 $AC\perp AB_1$，$\angle CBB_1=60°$，$AB=BC$，求二面角 $A-A_1B_1-C_1$ 的余弦值.